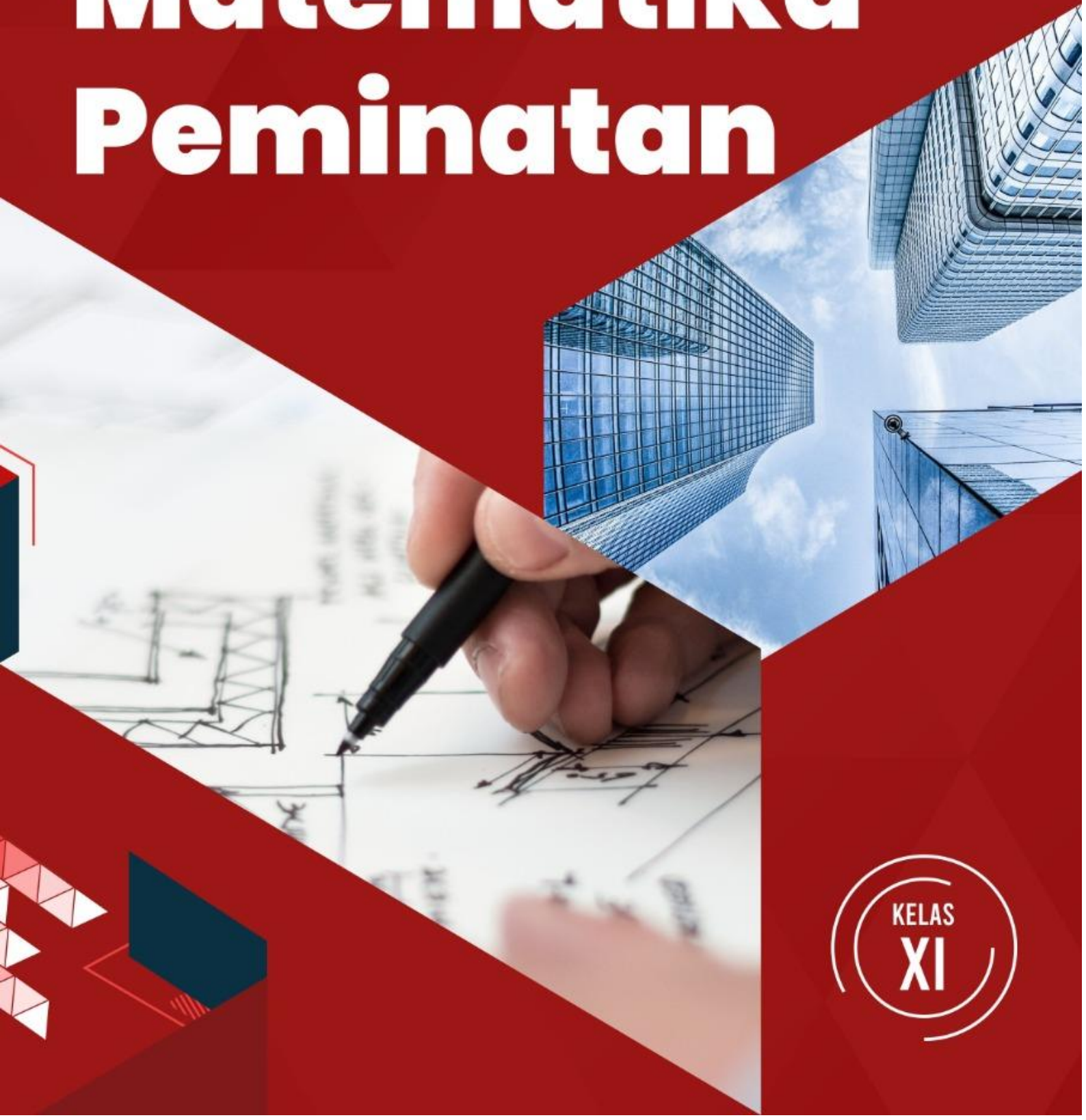
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

JUDUL MODUL

RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS

KELAS XI

PENYUSUN
YUYUN SRI YUNIARTI

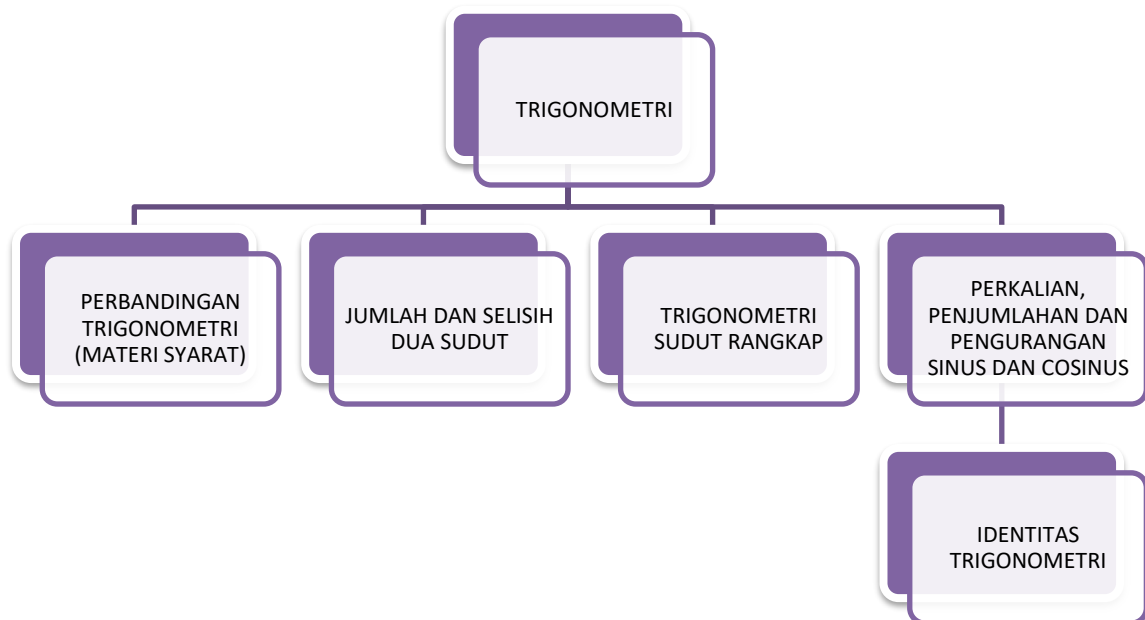
SMA NEGERI 1 PEDES

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Trigonometri	:	sebuah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga
Identitas trigonometri	:	sebuah relasi atau kalimat terbuka yang bisa memuat fungsi-fungsi trigonometri dan juga bernilai benar untuk setiap penggantian variabel secara konstan anggota domain fungsinya
Persamaan trigonometri	:	persamaan yang mengandung perbandingan antara sudut trigonometri dalam bentuk x
Sinus	:	perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°)
Cosinus	:	perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°)
Tangen	:	perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)

PETA KONSEP

TRIGONOMETRI
PERBANDINGAN TRIGONOMETRI (MATERI SYARAT)
JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT
TRIGONOMETRI SUDUT RANGKAP
PERKALIAN, PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN SINUS DAN COSINUS
IDENTITAS TRIGONOMETRI

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan
Kelas : XI
Alokasi Waktu : 14 JP
Judul Modul : Rumus Jumlah dan Selisih Sinus dan Cosinus

B. Kompetensi Dasar

3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

C. Deskripsi Singkat Materi

Trigonometri (berasal dari bahasa Yunani yaitu, *trigonon* = tiga sudut dan *metro* = mengukur) adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segi tiga dan fungsi trigonometrik seperti sinus, cosinus dan tangen. Trigonometri memiliki hubungan dengan geometri, meskipun ada ketidaksetujuan tentang apa hubungannya; bagi beberapa orang, trigonometri adalah bagian dari geometri. Sulit ditelusur siapa yang pertama kali mengklaim penemu ilmu ini, yang pasti ilmu ini sudah ada sejak jaman Mesir dan Babilonia 3000 tahun lampau.

Ilmuwan Yunani di masa Helenistik, Hipparchus (190 SM – 120 SM) diyakini adalah orang yang pertama kali menemukan teori tentang tigonometri dari keingintahuannya akan dunia. Adapun rumusan sinus, cosinus juga tangen diformulasikan oleh Surya Siddhanta, ilmuwan India yang dipercaya hidup sekitar abad 3 SM. Selebihnya teori tentang Trigonometri disempurnakan oleh ilmuwan-ilmuwan lain di jaman berikutnya. Trigonometri hanya mempelajari sisi-sisi dan sudut pada segitiga terutama segitiga siku-siku. Materi trigonometri sebenarnya termasuk matematika terapan yang umumnya berguna dibidang navigasi, konstuksi, dan surveying lahan tanah.

Aplikasi trigonometri yang paling sederhana adalah mengukur luas atau keliling tanah. Lebih jauh lagi adalah penentuan koordinat titik simpul dalam metoda elemen hingga untuk analisis dinamik pada jembatan non standar.

Adapun pemanfaatan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, antara lain:

1. Untuk menghitung sudut serang (*angle of attack)* yang paling optimal dari suatu peluncur senjata agar mampu melontarkan projektil sejauh mungkin.
2. Menentukan berapa gradient tertinggi dari suatu tanjakan dijalan umum dipe gunungan, agar semua kendaraan (terutama sedan, dengan panjang sumbu badan yang tinggi, tetapi, ketinggian as roda rendah) dapat melewatinya dengan selamat,
3. Untuk menghitung berapa "*lift force*" suatu sayap profil pesawat, dengan kecepatan tertentu, yang tidak boleh dilewati. Bila nilai ini dilewati, maka pesawat akan mengalami stall (jatuh karena tidak memiliki daya angkat), khususnya perhitungan ini diperlukan pada pesawat pemburu.
4. Pada olah gerak teknis kapal selam dibawah air, dengan mengetahui sudut hidroplane depan dan belakang, menginterpolarisasikannya dengan kecepatan kapal, kita lalu dapat memperkirakan berapa kita harus mengisi compensating tank agar kapal welltrimm pada kecepatan tersebut.

5. Pada pengukuran ketinggian / kontur tanah, dengan mengetahui jarak tiang pengukur yang satu terhadap yang lain, dan beda ketinggian antara dua tempat tiang pengukur, maka kita akan dapat mengetahui berapa gradien kenaikan tanah yang kita ukur.
6. Mengukur luas atau keliling tanah.
7. Lebih jauh lagi adalah penentuan koordinat titik simpul dalam metoda elemen hingga untuk analisis dinamik pada jembatan non standar.
8. Kalau menjadi TNI, kita harus bisa menentukan titik-titik koordinat dimana kita berada dengan menggunakan grafik dan sudut-sudut trigonometri.
9. Matematikawan India adalah perintis penghitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.
10. Lagadha adalah matematikawan yang dikenal sampai sekarang yang menggunakan geometri dan trigonometri untuk penghitungan astronomi dalam bukunya Vedanga, Jyotisha, yang sebagian besar hasil kerjanya hancur oleh penjajah India.
11. Matematikawan Yunani Hipparchus sekitar 150 SM menyusun tabel trigonometri untuk menyelesaikan segi tiga.
12. Matematikawan Yunani lainnya, Ptolemy sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut.

Pada modul ini kita akan mempelajari trigonometri lanjutan. Ananda tentu masih ingat dengan pelajaran trigonometri di kelas X yang mempelajari tentang perbandingan trigonometri. Nahhh materi tersebut jangan dilupakan yaaa, sebab materi tersebut merupakan salah satu prasyarat untuk memahami modul ini. Yuk ah gak usah takut dengan trigonometri, kita belajar bertahap selangkah demi selangkah yaa..

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai $\geq$ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut (4 JP)

Kedua : Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (4 JP)

Ketiga : Rumus Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Cosinus (4 JP) dan Membuktikan Identitas Trigonometri (2 JP)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Ananda dapat menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus, cosinus atau tangen untuk menentukan nilai dari sudut sinus, cosinus maupun tangen dan kebalikannya yang tidak istimewa dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hal tersebut.

B. Uraian Materi

Pada kegiatan pembelajaran pertama, kita akan mencari rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut dari sinus dan cosinus. Perhatikan penurunannya yaa...

1. Rumus untuk sin (α + β) dan sin (α – β)

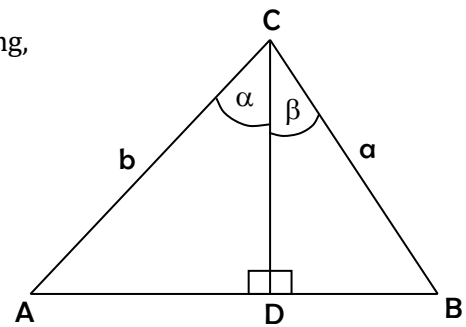
Menemukan rumus sin (α + β) :
Coba Ananda perhatikan gambar ΔABC di samping,

dengan perbandingan trigonometri diperoleh :

$\frac{CD}{a} = \cos\beta$, sehingga CD = a . cos β .... (1)

$\frac{AD}{b} = \sin\alpha$, sehingga AD = b . sin α .... (2)

$\frac{CD}{b} = \cos\alpha$, sehingga CD = b . cos α .... (3)

$\frac{BD}{a} = \sin\beta$, sehingga BD = a . sin β .... (4)

Agar lebih mudah diingat:

$$\sin\theta = \frac{\text{sisi depan sudut}}{\text{sisi miring}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{sisi samping sudut}}{\text{sisi miring}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sisi depan sudut}}{\text{sisi samping sudut}}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2),

diperoleh :

Luas ΔADC = $\frac{1}{2}$. AD x CD = $\frac{1}{2}$. b.sin α . a.cos β = $\frac{1}{2}$ab. sin α cos β ... (5)

Dengan menggunakan persamaan (3) dan (4), diperoleh :

Luas ΔBDC = $\frac{1}{2}$. BD x CD = $\frac{1}{2}$. a.sin β x b.cos α = $\frac{1}{2}$ab. cos α sin β ... (6)

Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh Luas ΔABC adalah :

Luas ΔABC = Luas ΔADC + Luas ΔBDC

= $\frac{1}{2}$ab. sin α cos β + $\frac{1}{2}$ab. cos α sin β

= $\frac{1}{2}$ab (sin α cos β + cos α sin β) .... (7)

Dengan menggunakan rumus umum luas segitiga, diperoleh Luas ΔABC :

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} a.b.\sin(\alpha+\beta) \quad \text{.............} (8)$$

Dari persamaan (7) dan (8) diperoleh kesamaan :

$$\frac{1}{2} a.b.\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} ab(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Atau :

$$\mathbf{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas merupakan ***rumus sinus jumlah dua sudut***. Adapun rumus sinus selisih dua sudut dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $-\beta$ ke dalam β , sehingga diperoleh :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

Karena $\cos(-\beta) = \cos\beta$ dan $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, maka :

$$\mathbf{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

Contoh Soal

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. sin 75°
   b. sin 15°

   Penyelesaian **:**

   a. $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \text{ ain } 30^\circ$

   $$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

   b. $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

   $$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

2. Hitunglah nilai dari $\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ$!

   Penyelesaian :

   $\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ = \sin(43^\circ - 13^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

3. Diketahui $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ dan $\cos\beta = \frac{5}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai $\sin(\alpha+\beta)$!

   Penyelesaian :

   $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
   $\sin\alpha$ dan $\cos\beta$ telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan $\cos\alpha$ dan $\sin\beta$ terlebih dahulu.
   Dari Identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, maka $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ atau $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

   $\cos\alpha = +\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ .... ($\cos\alpha$ positif untuk α lancip)

   $$= +\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

sin β $= +\sqrt{1 - cos^2 \beta}$ .... (sin β positif untuk β lancip)

$= +\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

Jadi, sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β = $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$.

4. Rumus untuk cos (α + β) dan cos (α – β)

Dengan menggunakan rumus sudut berelasi (pelajaran Trigonometri di kelas X), kita dapat menemukan rumus cosinus jumlah dua sudut sebagai berikut.

cos α = sin (90° - α) , sehingga cos (α + β) = sin (90° – (α + β))
= sin ((90° – α) – β)
= sin (90° – α) cos β – cos (90° – α)sinβ
= cos α cos β – sin α sin β

Jadi, **cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β**

Rumus cosinus selisih dua sudut dapat diperoleh dengan mensubstitusikan –β ke dalam β pada rumus di atas, sehingga diperoleh :

cos (α + (–β)) = cos α cos (–β) – sin α sin (–β)

Karena cos (–β) = cos β dan sin (–β) = – sin β , maka :

cos (α – β) = cos α cos β + sin α sin β

Contoh Soal

1) Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. cos 75° b. cos 15°

   Penyelesaian **:**

   a. cos 75° = cos (45° + 30°) = cos 45° cos 30° – sin 45° sin 30°

   $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

   b. cos 15° = cos (45° – 30°) = cos 45° cos 30° + sin 45° sin 30°

   $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

2) Hitunglah nilai dari cos 105° cos 75° + sin 105° sin 75° !

   Penyelesaian **:**

   cos 105° cos 75° + sin 105° sin 75° = cos (105° – 75°) = cos 30°= $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

3) Diketahui cos α = $\frac{3}{5}$ dan cos β = $\frac{12}{13}$ (α dan β sudut lancip).

   Tentukan nilai cos (α + β) !

   Penyelesaian :

   cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β

   cos α dan cos β telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan sin α dan sin β terlebih dahulu.

   Dari Identitas $\sin^2 α + \cos^2 α = 1$, maka $\sin^2 α = 1 – \cos^2 α$

   sin α $= +\sqrt{1 - cos^2 \alpha}$ .... (sin α positif untuk α lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

sin β $= +\sqrt{1-cos^2\beta}$ ……………. (sin β positif untuk β lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

Jadi, cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β = $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$.

5. Rumus untuk tan (α + β) dan tan (α – β)

***Menemukan rumus untuk* tan (α + β) *dan* tan (α – β)**

Dengan menggunakan rumus sinus dan kosinus untuk jumlah dan selisih dua sudut, tunjukkan bahwa :

$$tan\ (\alpha+\beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha\ tan\,\beta}$$

dan

$$tan\ (\alpha-\beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha\ tan\,\beta}$$

Contoh Soal

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. tan 75° b. tan 15°

   ***Penyelesaian* :**

   a. tan 75° = tan (45° + 30°) = $\frac{tan\,45^o + tan\,30^o}{1 - tan\,45^o\ tan\,30^o} = \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-(1)\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

   $= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$

   b. tan 15° = tan (45° – 30°) = $\frac{tan\,45^o - tan\,30^o}{1 + tan\,45^o\ tan\,30^o} = \frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+(1)\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

   $= \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$

2. Diketahui cos A = $\frac{4}{5}$ dan sin B = $-\frac{15}{17}$, dengan A sudut di kuadran I dan B sudut di kuadran III. Tentukan nilai dari :
   tan (A – B)

   ***Penyelesaian* :**

   Untuk A di kuadran I, tan A = $\frac{y}{x}$ dengan x bernilai positif dan y bernilai positif.

   cos A = $\frac{4}{5}$, artinya x = 4, r = 5, dan y = $+\sqrt{5^2-4^2} = \sqrt{9} = 3$, Sehingga tan A = $\frac{3}{4}$.

   Untuk B di kuadran III, tan B = $\frac{y}{x}$ dengan x bernilai negatif dan y bernilai negatif.

   sin B = $-\frac{15}{17}$, artinya y = –15, r = 17, dan x = $-\sqrt{17^2-(-15)^2} = -\sqrt{64} = -8$,

   Sehingga tan B = $\frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$.

   Jadi tan (A – B) = $\frac{tan\,A - tan\,B}{1+tan\,A\ tan\,B} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{15}{8}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{15}{8}\right)} = \frac{\frac{24-60}{32}}{\frac{32+45}{32}} = \frac{-36}{77} = -\frac{36}{77}$

Identitas Trigonometri Dasar

Nah ini catatan rumus biar Ananda ingat yaa

- $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$
- $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dan $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

C. Rangkuman

Berikut adalah rumus-rumus jumlah dan selisih dua sudut:

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
5. $tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha\ tan\,\beta}$
6. $tan\ (\alpha - \beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha\ tan\,\beta}$
7. Identitas Dasar:

- $\csc\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$
- $\sec\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$
- $\tan\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ dan $\cot\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
- $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$
- $1 + tan^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$
- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan tepat dan benar.

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. sin 105°
   b. sin 195°

2. Hitunglah nilai dari sin 42° cos 18° + cos 42° sin 18° !

3. Diketahui sin α = $\frac{4}{5}$ dan cos β = $\frac{5}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai sin (α - β) !

6. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   b. cos 105°   b. cos 195°

7. Hitunglah nilai dari cos 195° cos 75° + sin 195° sin 75° !

8. Diketahui cos α = $\frac{3}{5}$ dan cos β = $\frac{12}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai cos (α - β) !

9. Buktikan identitas : $\frac{cos(A+B)}{cos\, A.cos\, B} = 1 - tan\, A\, .\, tan\, B$

10. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
    a. tan 105°   b. tan 165°

11. Diketahui cos A = $\frac{4}{5}$ dan sin B = $-\frac{15}{17}$, dengan A sudut di kuadran I dan B sudut di kuadran III. Tentukan nilai dari :
    tan (A + B)

12. Buktikan identitas : $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -cotan\ \ x$

Pembahasan:

Nomor	Pembahasan	Skor
1	*Penyelesaian* : a. sin 105° = sin (45° + 60°) = sin 45° cos 60° + cos 45° sin 60° $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ b. sin 195° = sin (150° + 45°) = sin 150° cos 45° + cos 150° sin 45° $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$ $= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$	5 5
2	*Penyelesaian* : sin 42° cos 18° + cos 42° sin 18° = sin (42° + 18°) = sin 60° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	5
3	***Penyelesaian :*** sin (α - β) = sin α cos β - cos α sin β sin α dan cos β telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan cos α dan sin β terlebih dahulu. Dari Identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ atau $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. cos α = $+\sqrt{1 - sin^2\,\alpha}$ .... (cos α positif untuk α lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ Sin β = $+\sqrt{1 - cos^2\,\beta}$ .... (sin β positif untuk β lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ Jadi, sin (α - β) = sin α cos β - cos α sin β $= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65}$.	15
4	***Penyelesaian*** **:** a. cos 105° = cos (60° + 45°) = cos 60° cos 45° – sin 60° sin 45° $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ b. cos 195° = cos (150° + 45°) = cos 150° cos 45° – sin 150° sin 45°	5

	$= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} =$ $-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	5
5	***Penyelesaian*** **:** cos 195° cos 75° + sin 195° sin 75° = cos (195° – 75°) = cos 120° = $-\frac{1}{2}$	5
6	***Penyelesaian :*** cos (α - β) = cos α cos β + sin α sin β cos α dan cos β telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan sin α dan sin β terlebih dahulu. Dari Identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ sin α $= +\sqrt{1 - cos^2\,\alpha}$ ……………. (sin α positif untuk α lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ sin β $= +\sqrt{1 - cos^2\,\beta}$ ……………. (sin β positif untuk β lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$ Jadi, cos (α - β) = cos α cos β + sin α sin β $= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$	15
7	***Penyelesaian*** **:** $\frac{cos(\,A + B)}{cos\,A\,.\,cos\,B} = \frac{cos\,A\,cos\,B - sin\,A\,sin\,B}{cos\,A\,.\,cos\,B}$ $= \frac{cos\,A\,cos\,B}{cos\,A\,cos\,B} - \frac{sin\,A\,sin\,B}{cos\,A\,cos\,B}$ = 1 – tan A tan B	10
8	***Penyelesaian*** **:** a. tan 105° = tan (60° + 45°) = $\frac{tan\,60^o + tan\,45^o}{1 - tan60^o\ tan45^o} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3})(1)}$ $= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}$ $= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$ b. tan 165° = tan (120° + 45°) = $\frac{tan\,120^0 + tan\,45^0}{1 - \tan 120^0\ \tan 45^0} =$ $\frac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})(1)} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ $= \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$	10
9	***Penyelesaian*** **:** Untuk A di kuadran I, tan A = $\frac{y}{x}$ dengan x bernilai positif dan y bernilai positif.	

	$\cos A = \frac{4}{5}$, artinya $x = 4, r = 5$, dan $y = +\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$, Sehingga $\tan A = \frac{3}{4}$. Untuk B di kuadran III, $\tan B = \frac{y}{x}$ dengan x bernilai negatif dan y bernilai negatif. $\sin B = -\frac{15}{17}$, artinya $y = -15$, r = 17, dan $x = -\sqrt{17^2 - (-15)^2} = -\sqrt{64} = -8$, Sehingga $\tan B = \frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$. Jadi $\tan (A + B) = \frac{tan\,A\, +\, tan\,B}{1 - tan\,A\;\; tan\,B} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{15}{8}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{15}{8}\right)} = \frac{\frac{24+60}{32}}{\frac{32-45}{32}} = \frac{84}{-13} = -\frac{84}{13}$	10
10	***Penyelesaian :*** $tan(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{sin\frac{\pi}{2}\,cos\,x + cos\frac{\pi}{2}.sin\,x}{cos\frac{\pi}{2}\,cos\,x - sin\frac{\pi}{2}\,sin\,x} = \frac{(1)\,cos\,x + (0).sin\,x}{(0)\,cos\,x - (1)\,sin\,x}$ $= \frac{cos\,x}{-\,sin\,x} = -$ cotan x	10
TOTAL SKOR		100

E. Penilaian Diri

Isilah oleh Ananda sesuai dengan kenyataannya

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	**Tidak**
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami proses menurunkan rumus-rumus trigonometri ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menggunakan rumus-rumus trigonometri tersebut untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan jumlah dan selisih dua sudut pada sinus dan cosinus?		
3.	Apakah Ananda telah mampu membedakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut antara sinus dan cosinus?		

Jika Jawaban Ananda tidak maka Ananda dapat berdiskusi dengan teman atau guru matematika Ananda secara daring maupun tatap muka asal tetap memperhatikan protokol kesehatan yaa...

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan Ananda dapat menggunakan rumus trigonometri sudut rangkap dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus tersebut.

B. Uraian Materi

1. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (Ganda)

Sudut ganda dari α dinyatakan dengan 2α. Rumus trigonometri sudut rangkap dapat diperoleh dengan menggunakan rumus trigonometri jumlah dua sudut.

- Rumus sinus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

- Rumus kosinus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{aligned}$$

dengan menggunakan identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kita dapat menemukan bentuk lain untuk $\cos 2\alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)\\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

Atau :

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

- Rumus tangen sudut rangkap

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha+\alpha)\\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\ \tan\alpha}\\ &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Sederhanakan bentuk – bentuk di bawah ini !

   a. $2\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ$
   b. $2\cos^2 67{,}5^\circ - 1$
   c. $2\sin 3A\cos 3A$
   d. $1 - 2\sin^2 5A$
   e. $\cos^2 3A - \sin^2 3A$
   f. $\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}$

   Penyelesaian :

   a. $2\sin 22{,}5^\circ\cos 22{,}5^\circ = \sin 2(22{,}5^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   b. $2\cos^2 67{,}5^\circ - 1 = \cos 2(67{,}5^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $2 \sin 3A \cos 3A = \sin 2(3A) = \sin 6A$

d. $1 - 2 \sin^2 5A = \cos 2(5A) = \cos 10A$

e. $\cos^2 3A - \sin^2 3A = \cos 2(3A) = \cos 6A$

f. $\frac{2 \tan 3\alpha}{1 - \tan^2 3\alpha} = \tan 2(3\alpha) = \tan 6\alpha$

2. Diketahui $\sin A = \frac{5}{13}$, dengan A lancip. Hitung nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A !

Penyelesaian :

$\sin A = \frac{5}{13}$, maka $\cos A = +\sqrt{1 - \sin^2 A} = +\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

Sehingga :

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$

$\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}} = \frac{120}{119}$

3. Tunjukkan bahwa :

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(\sin\theta + \cos\theta)^2 &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 + 2\sin\theta\end{aligned}$$

2. Rumus Trigonometri untuk Setengah Sudut

Dari rumus trigonometri sudut ganda, dapat diturunkan rumus trigonometri untuk setengah sudut, yaitu dengan menetapkan $\frac{1}{2}\alpha$ sebagai sudut tunggal dan α sebagai sudut ganda.

- $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

  Misalkan $2\theta = \alpha$ dan $\theta = \frac{\alpha}{2}$, maka : $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

  $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}}$

- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

  Misalkan $2\theta = \alpha$ dan $\theta = \frac{\alpha}{2}$, maka : $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

  $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}}$

- $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \Rightarrow$ $\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$

- Dengan mengalikan ruas kanan pada rumus tangen setengah sudut dengan $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, diperoleh :

  $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \times \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

- Dengan mengalikan ruas kanan pada rumus tangen setengah sudut dengan $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, diperoleh :

$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ \mathbf{x}\ \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Contoh Soal

Tanpa menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, hitunglah :

a. sin 22,5°
b. cos 165°
c. tan 67,5°

Penyelesaian :

a. $22{,}5° = \frac{1}{2}(45°)$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, maka : $\sin 22{,}5° = +\sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{2}}$ .... (+) karena di kuadran I

$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b. $165° = \frac{1}{2}(330°)$,

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, maka : $\cos 165° = -\sqrt{\frac{1+\cos 330^o}{2}}$ ...... (−) karena di kuadran II

$= -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

c. $67{,}5° = \frac{1}{2}(135°)$, dengan menggunakan : $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

maka : $\tan 67{,}5° = \frac{\sin 135^o}{1+\cos 135^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$

C. Rangkuman

Rumus Trigonometri Sudut Ganda:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Rumus Trigonometri Sudut Tengahan:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

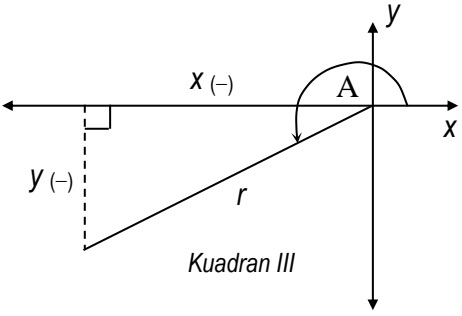
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

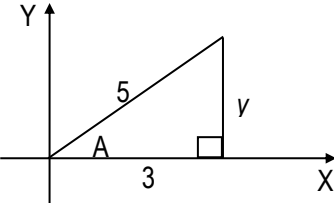
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

D. Latihan Soal

1. Sederhanakan bentuk – bentuk di bawah ini !
   a. $1 - 2\sin^2 5A$
   b. cos2 3A – sin2 3A
   c. $\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}$

2. Diketahui $\sin A = \frac{3}{5}$, dengan A lancip. Hitung nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A !

3. Jika tan A = 3 dan A di kuadran III, hitunglah nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A.

4. Tunjukkan bahwa :
   a. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$
   b. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ (petunjuk : nyatakan bahwa 3A = 2A + A)
   c. $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{1-\tan^4\alpha} = \cos^4\alpha$

5. Jika $\tan\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}$, A sudut lancip, hitunglah tan A dan tan 2A !

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skor
1	*Penyelesaian* : a. $1 - 2\sin^2 5A = \cos 2(5A) = \cos 10A$ b. $\cos^2 3A - \sin 2\ 3A = \cos 2(3A) = \cos 6A$ c. $\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha} = \tan 2(3\alpha) = \tan 6\alpha$	5 5 5
2	*Penyelesaian* : $\sin A = \frac{3}{5}$, maka $\cos A = +\sqrt{1-\sin^2 A} = +\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ Sehingga : $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$ $\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$	5 5 5
3	*Penyelesaian :* Untuk menentukan sin A dan cos A dengan tan A yang diketahui, maka sebaiknya digunakan segitiga siku-siku dengan A di kuadran III, seperti pada gambar. $\tan A = \frac{y}{x}$ dengan $\tan A = 3 = \frac{-3}{-1}$ A di kuadran III, berarti $x = -1$ dan $y = -3$, sehingga $r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ maka : $\sin A = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$ dan $\cos A = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	30

	cos 2A = $\cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$ tan 2A = $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2(3)}{1-(3)^2} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$	
4	*Penyelesaian :* a. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$ $= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta$ $= 1 + 2\sin\theta$ b. sin 3A = sin (2A + A) = sin 2A cos A + cos 2A sin A = (2 sin A cos A) cos A + ($\cos^2 A - \sin^2 A$) sin A = 2 sin A $\cos^2 A$ + $\cos^2 A$ sin A – $\sin^3 A$ = 3 sin A $\cos^2 A$ – $\sin^3 A$ = 3 sin A (1 – $\sin^2 A$) – $\sin^3 A$ **(ingat : $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$)** = 3 sin A – 3 $\sin^3 A$ – $\sin^3 A$ = 3 sin A – 4 $\sin^3 A$ (terbukti) c. $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{1-\tan^4\alpha} = \frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)(1-\tan^2\alpha)}$ **Ingat bahwa:** **$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$** **$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$** **$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$** $= \frac{(1)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{(\sec^2\alpha)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$ $= \frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$ $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $= \frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$ $= \frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\frac{1}{\cos^4\alpha}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \cos^4\alpha$ (terbukti)	10 10 10
	Penyelesaian : $\tan\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$ $\Leftrightarrow$ 1 + cos A = 4 – 4 cos A	

5	$\Leftrightarrow$ 5 cos A = 3 $\Leftrightarrow$ cos A = $\frac{3}{5}$ cos A = $\frac{3}{5}$, berarti $x = 3$, $r = 5$, dan $y = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ maka : tan A = $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$ tan 2A = $\frac{2\,tan\,A}{1 - tan^2 A} = \frac{2\left(\frac{4}{3}\right)}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{8}{3}$ x $\left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{24}{7}$	10
TOTAL SKOR		100

E. Penilaian Diri

Isilah oleh Ananda sesuai dengan kenyataannya

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami proses menurunkan rumus-rumus trigonometri sudut rangkap?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menggunakan rumus-rumus trigonometri tersebut untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan sinus, cosinus dan tangen sudut rangkap?		
3.	Apakah Ananda telah mampu membedakan rumus trigonometri sudut rangkap untuk sinus, cosinus maupun tangen?		

Jika Jawaban Ananda tidak maka Ananda dapat berdiskusi dengan teman atau guru matematika Ananda secara daring maupun tatap muka asal tetap memperhatikan protokol kesehatan yaa...

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

Rumus Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan sinus dan cosinus

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Ananda dapat menurunkan dan menggunakan rumus perkalian, penjumlahan maupun pengurangan dari sinus dan kosinus dan dapat menyelesaikan amsalah yang berkaitan dengan rumus tersebut.

B. Uraian Materi

1. Rumus Konversi Perkalian ke Penjumlahan atau Pengurangan

Pada pembelajaran pertama telah dipelajari rumus fungsi trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut. Pada bagian ini, kita akan menggunakan rumus-rumus tersebut untuk menemukan rumus konversi perkalian ke penjumlahan atau pengurangan dan sebaliknya.

- **Rumus perkalian sinus dan kosinus**

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad + \\ \hline \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

Jadi,

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

Atau

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad - \\ \hline \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Jadi,

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

atau

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

- **Rumus perkalian kosinus dan kosinus**

$$
\begin{array}{ll}
\cos(\alpha+\beta) & = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) & = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\hline
\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) & = 2\cos\alpha\cos\beta \quad +
\end{array}
$$

Jadi,

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

atau

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

- **Rumus perkalian sinus dan sinus**

$$
\begin{array}{ll}
\cos(\alpha+\beta) & = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) & = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\hline
\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) & = -2\sin\alpha\sin\beta \quad -
\end{array}
$$

Jadi,

$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

atau

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

Contoh Soal

1. Nyatakan bentuk perkalian berikut sebagai penjumlahan/pengurangan
   a. $4\cos 2x\cos 3x$
   b. $3\sin 4x\sin 6x$
   Penyelesaian :
   a. $4\cos 2x\cos 3x = 2(2\cos 2x\cos 3x) = 2[\cos(2x+3x)+\cos(2x-3x)]$
   $= 2[\cos 5x+\cos(-x)] = 2\cos 5x + 2\cos x$
   b. $3\sin 4x\sin 6x = -\frac{3}{2}(-2\sin 4x\sin 6x) = -\frac{3}{2}[\cos(4x+6x)-\cos(4x-6x)]$
   $= -\frac{3}{2}[\cos 10x - \cos(-2x)] = -\frac{3}{2}\cos 10x + \frac{3}{2}\cos 2x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   a. $\cos 52{,}5° \sin 7{,}5°$
   b. $2\sin 127{,}5° \sin 97{,}5°$
   Penyelesaian :
   a. $\cos 52{,}5° \sin 7{,}5° = \frac{1}{2}[\sin(52{,}5°+7{,}5°)-\sin(52{,}5°-7{,}5°)] = \frac{1}{2}(\sin 60° - \sin 45°)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

b. $2 \sin 127{,}5° \sin 97{,}5° = -[\cos(127{,}5° + 97{,}5°) - \cos(127{,}5° - 97{,}5°)]$
$= -(\cos 225° - \cos 30°) = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

2. Rumus Konversi Penjumlahan atau Pengurangan ke Perkalian

Untuk menemukan rumus konversi penjumlahan/pengurangan ke perkalian, maka perhatikan rumus konversi perkalian ke penjumlahan/pengurangan pada bagian pertama :

- $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
- $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

Misalkan $P = \alpha + \beta$ dan $Q = \alpha - \beta$
Maka diperoleh :

$P + Q = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(P + Q)$

dan $P - Q = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(P - Q)$

Jika kita substitusikan pemisalan di atas pada rumus konversi perkalian ke penjumlahan atau pengurangan, maka diperoleh rumus konversi penjumlahan/pengurangan ke perkalian sebagai berikut :

- $\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\cos P + \cos Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\cos P - \cos Q = -2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$

Contoh Soal

1. Ubahlah setiap bentuk di bawah ini ke dalam bentuk perkalian !

   a. $\cos 3P + \cos 7P$
   b. $\sin 8x - \sin 2x$

   Penyelesaian :

   a. $\cos 3P + \cos 7P = 2 \cos \frac{1}{2}(3P + 7P) \cos \frac{1}{2}(3P - 7P)$
   $= 2 \cos 5P \cos(-2P) = 2 \cos 5P \cos 2P$
   b. $\sin 8x - \sin 2x = 2 \cos \frac{1}{2}(8x + 2x) \sin \frac{1}{2}(8x - 2x) = 2 \cos 5x \sin 3x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :

   a. $\sin 15° + \sin 75°$
   b. $\cos 195° - \cos 105°$

   Penyelesaian :

   a. $\sin 15° + \sin 75° = 2 \sin \frac{1}{2}(15° + 75°) \cos \frac{1}{2}(15° - 75°) = 2 \sin 45° \cos(-30°)$
   $= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

b. $\cos 195° - \cos 105° = -2 \sin \frac{1}{2}(195° + 105°) \sin \frac{1}{2}(195° - 105°) = -2 \sin 150°$ $\sin 45°$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

3. Identitas Trigonometri

Langkah – langkah yang dapat digunakan untuk membuktikan suatu identitas trigonometri atau persamaan trigonometri :

1) Selesaikan salah satu ruas (pilih ruas yang bentuknya kompleks/tidak sederhana)
2) Pergunakan operasi aljabar yang sesuai dan rumus – rumus trigonometri yang telah dipelajari sebelumnya.
3) Samakan hasilnya dengan ruas yang lain.

Contoh Soal

1. Buktikan identitas di bawah ini :

a. $\frac{\cos x + \cos y}{\sin x - \sin y} = \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$

b. $\sin(45° + x) - \sin(45° - x) = \sqrt{2}\ \sin x$

Penyelesaian :

a. Ruas kiri $= \frac{\cos x + \cos y}{\sin x - \sin y}$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$= \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$ = Ruas kanan (terbukti)

b. Ruas kiri = $\sin(45° + x) - \sin(45° - x)$

$$= 2\cos\left(\frac{(45^o + x) + (45^o - x)}{2}\right)\sin\left(\frac{(45^o + x) - (45^o - x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{90^o}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$

$= 2 \text{ Cos } 45^o \sin x$

$= 2.\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\sin x$

$= \sqrt{2}\ \sin x$ = Ruas kanan (terbukti)

2. Misalkan $P + Q + R = 180^o$, buktikan bahwa $\sin 2P + \sin 2Q + \sin 2R = 4 \sin P . \sin Q . \sin R$!

Penyelesaian **:**

Catatan :
$P + Q + R = 180°$
$R = 180° – (P + Q)$
$P + Q = 180° – R$
$\sin (P + Q) = \sin (180° – R) = \sin R$
$\cos R = \cos (180° – (P + Q)) = – \cos (P + Q)$

Ruas kiri $= \sin 2P + \sin 2Q + \sin 2R$
$= (\sin 2P + \sin 2Q) + \sin 2R$
$= 2\, sin\left(\frac{2P+2Q}{2}\right) cos\left(\frac{2P-2Q}{2}\right) + \sin 2R$
$= 2 \sin (P + Q) \cos (P – Q) + 2 \sin R \cos R$
$= 2 \sin R \cos (P – Q) + 2 \sin R \cos R$
$= 2 \sin R (\cos (P – Q) + \cos R)$
$= 2 \sin R (\cos (P – Q) – \cos (P + Q))$
$= 2 \sin R \left(-2\, sin\left(\frac{(P-Q)+(P+Q)}{2}\right) sin\left(\frac{(P-Q)-(P+Q)}{2}\right)\right)$
$= 2 \sin R \left(-2\, sin\left(\frac{2P}{2}\right) sin\left(\frac{-2Q}{2}\right)\right)$
$= 2 \sin R (2 \sin P \sin Q)$
$= 4 \sin P \sin Q \sin R$
= Ruas kanan (terbukti)

C. Rangkuman

Rumus-rumus di atas dapat kita rangkum sebagai berikut:

1. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
2. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
3. $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
4. $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
5. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
6. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
7. $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$
8. $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$
9. $\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
10. $\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$
11. $\cos P + \cos Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
12. $\cos P - \cos Q = -2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal latihan ini yaa...

1. Nyatakan bentuk perkalian berikut sebagai penjumlahan/pengurangan !
   a. $2 \sin 3x \cos 2x$
   b. $\cos x \sin 5x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   a. $\sin 75° \cos 15°$
   b. $3 \cos 105° \cos 15°$

3. Buktikan identitas $\sin(A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

4. Hitunglah nilai dari $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$!

5. Ubahlah setiap bentuk di bawah ini ke dalam bentuk perkalian !
   a. $\sin 3A + \sin A$
   b. $\cos 6x - \cos 2x$

6. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   $\frac{\sin 75^o - \sin 15^o}{\cos 75^o + \cos 15^o}$

7. Buktikan bahwa :
   a. $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$
   b. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = \cos 2\alpha (1 + 2 \cos \alpha)$

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skor
1	*Penyelesaian* : a. $2 \sin 3x \cos 2x = \sin(3x + 2x) + \sin(3x - 2x)$ $= \sin 5x + \sin x$ b. $\cos x \sin 5x = \frac{1}{2}(2 \cos x \sin 5x)$ $= \frac{1}{2}[\sin(x + 5x) - \sin(x - 5x)]$ $= \frac{1}{2}[\sin 6x - \sin(-4x)] = \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 4x$	5 5
2	*Penyelesaian* : a. $\sin 75° \cos 15° = \frac{1}{2}[\sin(75° + 15°) + \sin(75° - 15°)]$ $= \frac{1}{2}(\sin 90° + \sin 60°)$ $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$ b. $3 \cos 105° \cos 15° = \frac{3}{2}(2 \cos 105° \cos 15°)$ $= \frac{3}{2}[\cos(105° + 15°) + \cos(105° - 15°)]$ $= \frac{3}{2}(\cos 120° + \cos 90°) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2} + 0\right) = -\frac{3}{4}$	5 5
3	*Penyelesaian* : $\sin(A + B) \sin(A - B)$ $= -\frac{1}{2}[\cos((A + B) + (A - B)) - \cos((A + B) - (A - B))]$ $= -\frac{1}{2}[\cos 2A - \cos 2B]$ $= -\frac{1}{2}[(1 - 2\sin^2 A) - (1 - 2\sin^2 B)]$ $= -\frac{1}{2}[-2\sin^2 A + 2\sin^2 B]$ $= \sin^2 A - \sin^2 B$ (terbukti)	15
4	*Penyelesaian* : $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$ $= \sin 10°\left[-\frac{1}{2}(\cos(50^o + 70^o) - \cos(50^o - 70^o))\right]$ $= \sin 10°\left[-\frac{1}{2}\cos 120^o + \frac{1}{2}\cos(-20^o)\right]$ $= \sin 10°\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos 2 \cos 20^o\right]$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{2}\sin 10^o \cos 20^o$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin(10^o + 20^o) + \sin(10^o - 20^o))\right]$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{4}[\sin 30^o + \sin(-10^o)]$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{4}\sin 30^o - \frac{1}{4}\sin 10^o$ $= \frac{1}{4}\sin 30° = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$	20

5	*Penyelesaian* : a. $\sin 3A + \sin A = 2 \sin \frac{1}{2}(3A + A) \cos \frac{1}{2}(3A - A) = 2 \sin 2A \cos A$ b. $\cos 6x - \cos 2x = -2 \sin \frac{1}{2}(6x + 2x) \sin \frac{1}{2}(6x - 2x) = -2 \sin 4x \sin 2x$	**5** **5**
6	*Penyelesaian* : $\frac{\sin 75^o - \sin 15^o}{\cos 75^o + \cos 15^o} = \frac{2 \cos\frac{1}{2}(75^o+15^o) \sin\frac{1}{2}(75^o-15^o)}{2 \cos\frac{1}{2}(75^o+15^o) \cos\frac{1}{2}(75^o-15^o)}$ $= \frac{2 \cos 45^o \sin 30^o}{2 \cos 45^o \cos 30^o}$ $= \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	**15**
7	*Penyelesaian* : a. $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \sin\frac{1}{2}(5x+3x) \cos\frac{1}{2}(5x-3x)}{2 \cos\frac{1}{2}(5x+3x) \cos\frac{1}{2}(5x-3x)}$ $= \frac{2 \sin 4x \cos x}{2 \cos 4x \cos x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x$ b. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = (\cos 3\alpha + \cos \alpha) + \cos 2\alpha$ $= [\, 2 \cos \frac{1}{2}(3\alpha + \alpha) \cos \frac{1}{2}(3\alpha - \alpha)\,] + \cos 2\alpha$ $= 2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha$ $= \cos 2\alpha\,(1 + 2 \cos \alpha)$	**10** **10**
TOTAL SKOR		**100**

E. Penilaian Diri

Isilah oleh Ananda sesuai dengan kenyataannya

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami proses menurunkan rumus-rumus trigonometri pada kegiatan pembelajaran ketiga ini?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menggunakan rumus-rumus trigonometri tersebut untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan perkalian, penjumlahan dan pengurangan sinus, cosinus dan tangen?		
3.	Apakah Ananda telah mampu membedakan rumus trigonometri tersebut?		

Jika Jawaban Ananda tidak maka Ananda dapat berdiskusi dengan teman atau guru matematika Ananda secara daring maupun tatap muka asal tetap memperhatikan protokol kesehatan yaa...

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat

1. Jika $\cos 2A = -\frac{7}{25}$ $untuk$ $180^0 \leq 2A \leq 270^0$ maka
   A. $\sin A = \pm\frac{4}{5}$
   B. $\cos A = \frac{3}{5}$
   C. $\tan A = \frac{4}{3}$
   D. $\sin A = -\frac{4}{5}$
   E. $\csc A = \frac{5}{4}$

2. Nilai dari cos 265^0 – cos 95^0 adalah
   A. - 2
   B. – 1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

3. Nilai dari sin 75^0 – sin 165^0 = ...
   A. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   B. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

4. Diketahui $\cos x = \frac{3}{5}$ $untuk$ $0^0 < x < 90^0$ $nilai\ dari$ $\sin 3x + \sin x = \cdots$
   A. $\frac{75}{125}$
   B. $\frac{96}{125}$
   C. $\frac{108}{125}$
   D. $\frac{124}{125}$
   E. $\frac{144}{125}$

5. Diketahui sin A + sin B = 1 dan cos A + cos B = $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ nilai dari cos (A - B) =...
   A. 1
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{1}{3}$

6. Diketahui x dan y sudut lancip dengan $x - y = \frac{\pi}{6}$ jika $\tan x = 3 \tan\ y, maka\ x + y = \cdots$
   A. $\frac{\pi}{2}$
   B. $\frac{\pi}{3}$
   C. $\frac{\pi}{6}$
   D. $\frac{2\pi}{3}$
   E. π

7. Diketahui $\sin \alpha = \frac{3}{5}\ dan \cos \beta = \frac{12}{13}\ (\alpha\ dan\ \beta\ sudut\ lancip)$. Nilai dari $\sin(\alpha + \beta) =$..
   A. $\frac{56}{65}$
   B. $\frac{48}{65}$
   C. $\frac{36}{65}$
   D. $\frac{20}{65}$
   E. $\frac{16}{65}$

8. Diketahui $\cos x = \frac{12}{13} nilai \tan \frac{1}{2} x =$
   A. $\frac{1}{26}$
   B. $\frac{1}{5}$
   C. $\frac{1}{\sqrt{26}}$
   D. $\frac{5}{\sqrt{26}}$
   E. $\frac{5}{13}$

9. Bentuk lain dari $\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}$ adalah
   A. Sin A
   B. Cos A
   C. Cot A
   D. Tan A
   E. 1 + sin A

10. Diketahui $\tan \alpha = 1\ dan\ tan\beta = \frac{1}{3}\ \alpha, \beta\ sudut\ lancip, maka \sin(\alpha - \beta) = \cdots$
    A. $\frac{2}{3}\sqrt{5}$
    B. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
    C. $\frac{1}{2}$
    D. $\frac{2}{5}$
    E. $\frac{1}{5}$

11. Jika tan (A + B) = 5 dan tan (A – B) = 2 maka tan 2A = ...
    A. 7
    B. $\frac{7}{9}$
    C. $-\frac{7}{9}$
    D. $\frac{9}{7}$
    E. $-\frac{9}{7}$

12. Jika $A = 20^0\ dan\ B = 25^0$ maka nilai dari (1 + tan A)(1 + tan B) adalah...
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4

13. Nilai dari 20 cos 20^0 cos 40^0 cos 80^0 adalah ...
    A. $\frac{1}{2}$
    B. $\frac{3}{2}$
    C. $\frac{5}{2}$
    D. $\frac{7}{2}$
    E. $\frac{9}{2}$

14. Pada segitiga siku-siku ABC berlaku cos A cosB = $\frac{1}{3}$ nilai dari cos 2A =
    A. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
    B. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
    C. 1
    D. $\frac{1}{9}$
    E. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. C
3. D
4. E
5. E
6. A
7. A
8. B
9. C
10. B
11. C
12. C
13. C
14. E

DAFTAR PUSTAKA

Tim. (2019). Belajar Praktis Matematika. Klaten : Viva Pakarindo

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Willa Adrian. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

https://mathcyber1997.com/soal-dan-bahas-penerapan-identitas-trigonometri/ diakses tanggal 6 Oktober 2020 pkl 22.30 WIB

http://likha-ika.blogspot.com/2013/04/babi-pendahuluan-a.html diakses tanggal 6 Oktober 2020 pkl 21.30 WIB

s